

2013학년도
아주대학교 수시2차 논술 예시문제

자연계열

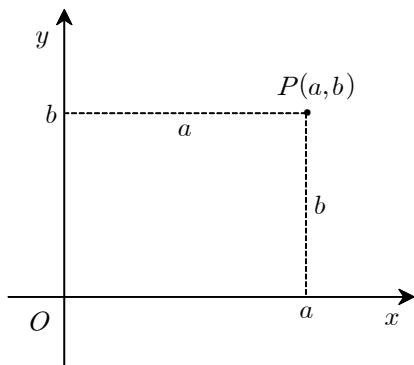


성명	
전형	
수험번호	

문제 1 (50 점)

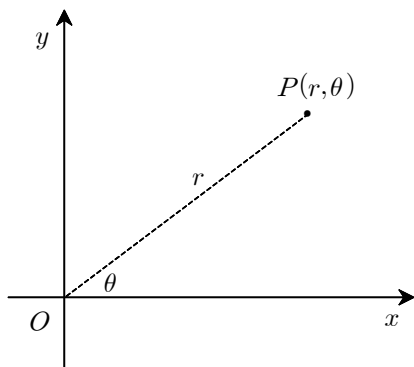
(가) 평면 위에 있는 점들의 위치를 나타내기 위해 일반적으로 사용하는 좌표에는 직교좌표(rectangular coordinates)와 극좌표(polar coordinates)가 있다.

직교좌표는 아래 그림과 같이 좌표축으로부터의 거리를 이용하여 나타낸다.



두 점 P, Q 의 좌표가 각각 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ 일 때 피타고라스(Pythagoras)의 정리에 의해 P 와 Q 의 거리는 $\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ 이 된다. 직교좌표를 이용하여 평면 위의 곡선들을 x 와 y 에 관한 방정식으로 나타낼 수 있다. 예를 들면, $ax + by + c = 0$ 은 직선의 방정식이고, 원점을 중심으로 하고 반지름이 a 인 원의 방정식은 $x^2 + y^2 = a^2$ 이다.

극좌표는 아래 그림과 같이 원점으로부터의 거리와 x 축의 양의 방향으로부터의 편각을 이용하여 나타낸다.

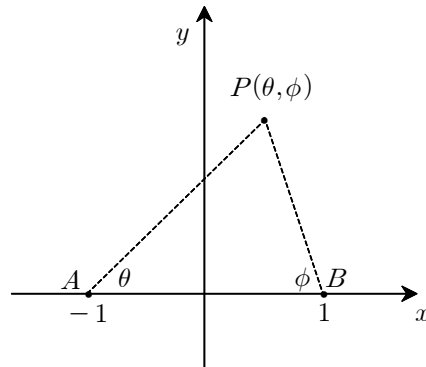


그러므로 점 P 의 직교좌표가 (x, y) 이고 극좌표가 (r, θ) 이면, 정의에 의해 다음 관계식이 성립하게 된다.

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta; \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \tan \theta = \frac{y}{x}$$

극좌표에 의한 방정식 $r = a$ 와 $\theta = b$ 는 각각 원점을 중심으로 하는 원과 원점을 지나는 직선을 나타내게 된다.

(나) 평면 위의 점의 위치를 나타내기 위한 또 다른 좌표로 양각좌표(biangular coordinates)가 있다. 양각좌표는 양극좌표(bipolar coordinates)라고도 하는데, 다음 그림과 같이 두 점 $A(-1,0)$ 과 $B(1,0)$ 을 고정하고 임의의 점 P 의 좌표를 AP 가 AB 와 이루는 각을 AB 로부터 반시계방향으로 측정한 값 θ 와 BP 가 AB 와 이루는 각을 AB 로부터 시계방향으로 측정한 값 ϕ 에 의해 (θ, ϕ) 로 나타낸다.



예를 들면, 방정식 $\theta = \phi$ 는 y 축을 나타내게 된다. 종종 θ 와 ϕ 대신에 $\lambda = \cot \theta$ 와 $\mu = \cot \phi$ 를 써서 (λ, μ) 를 양각좌표라 하기도 한다. 양각좌표에 의한 방정식을 다룰 때에는 삼각함수에 대한 다음의 공식이 유용하다.

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$$

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \tan \beta}$$

다양한 좌표들을 함께 다룰 때에는 xy -좌표, $r\theta$ -좌표, $\theta\phi$ -좌표, $\lambda\mu$ -좌표 등으로 부르기로 한다. $\lambda\mu$ -좌표와 xy -좌표 사이에는 다음과 같은 관계식이 성립한다.

$$(1) \quad \lambda = \frac{1+x}{y}, \quad \mu = \frac{1-x}{y}$$

[문제 1-1] (10 점) (나)의 식 (1)이 성립함을 보여라.

[문제 1-2] (10 점) 양각좌표에 의한 방정식 $\theta + \phi = \frac{\pi}{3}$ 가 나타내는 곡선이 원이 됨을 보여라.

[문제 1-3] (10 점) $\lambda\mu$ -좌표가 각각 $(2,1)$ 와 $(3,-1)$ 인 두 점 P, Q 사이의 거리를 구하라.

[문제 1-4] (10 점) xy -좌표가 각각 $(-1,-1)$ 과 $(1,3)$ 인 두 점을 지나는 직선의 $\lambda\mu$ -좌표에 의한 방정식을 구하라.

[문제 1-5] (10 점) $\lambda\mu$ -좌표에 의한 방정식 $\lambda\mu = \frac{1}{4}$ 의 그래프를 그려라.

문제 2 (50 점)

제공해서 -1 이 되는 수를 문자 i 로 나타낸다. 즉, $i^2 = -1$ 이고 i 를 **허수단위**라 한다. x, y 가 실수일 때, $z = x + yi$ 꼴의 수를 **복소수**라 하고, x 와 y 를 각각 z 의 **실수부**와 **허수부**라 한다. 기호로는 각각 $Re(z) = x$, $Im(z) = y$ 로 표시한다. 실수의 경우와 유사하게, 복소수에 대한 사칙연산이 가능하고 교환법칙, 결합법칙, 분배법칙과 같은 연산의 기본법칙이 성립한다.

복소수 $z = x + yi$ 의 허수부의 부호를 바꾸어 얻어지는 복소수를 z 의 **켈레복소수**라 하고 \bar{z} 로 표시한다. 곧, $\bar{z} = x - yi$ 이다. 임의의 복소수 z_1, z_2 에 대하여

$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2, \quad \overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$$

가 성립한다.

복소수 $z = x + yi$ 를 평면에서 직교좌표가 (x, y) 인 점에 대응시키면, 복소수들과 평면의 점들은 1대 1로 대응된다. 평면의 점의 좌표를 복소수로 나타낼 때, 이것을 **복소수 평면**이라 부른다. 복소수 평면의 가로축(x 축)을 **실축**, 세로축(y 축)을 **허축**이라 부른다. 복소수 z 와 켈레복소수 \bar{z} 가 표시하는 점은 실축에 대하여 대칭이다.

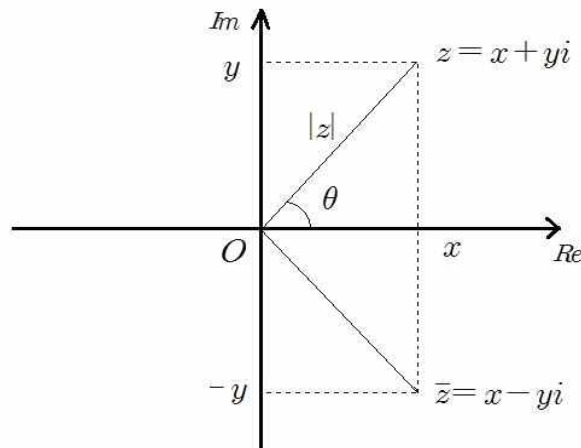


그림. 복소수의 표시

복소수 $z_1 = x_1 + y_1i$, $z_2 = x_2 + y_2i$ 에 대하여 $z_1 + z_2 = x_1 + x_2 + (y_1 + y_2)i$ 가 성립하므로, 복소수 $z_1 + z_2$ 가 나타내는 점은 복소수 평면에서 z_1 이 표시하는 점을 실축 방향으로 x_2 만큼, 허축 방향으로 y_2 만큼 평행이동한 점이다.

복소수 $z = x + yi$ 의 **크기**를 $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ 이라 정의한다. 그러면 $|z|^2 = z\bar{z}$ 이 성립하고, $|z|$ 는 복소수 평면에서 원점으로부터 좌표가 z 인 점까지의 거리를 나타낸다. 일반적으로 두 개의 복소수 z 와 w 에 대하여 $|z - w|$ 는 좌표가 z 와 w 인 두 점 사이의 거리를 의미한다. 임의의 두 복소수 z_1 과 z_2 에 대하여 $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$ 이 성립하

고, 만일 $z_2 \neq 0$ 이면 $\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$ 이 성립한다.

예제 1. 복소수 방정식 $|z - i| = 1$ 을 만족하는 z 의 집합은 복소수 평면에서 중심의 좌표가 i 이고 반지름이 1인 원을 나타낸다. 그리고 부등식 $|z - i| \leq 1$ 을 만족하는 z 의 집합은 이 원과 그 내부를 나타낸다.

복소수 평면의 양의 실축에서 좌표가 $z = x + yi$ 인 점까지 반시계방향의 각도를 θ 라 하면(그림 참조), $x = |z|\cos\theta$, $y = |z|\sin\theta$ 이므로 $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$ 이다. 이제 θ 를 복소수 z 의 **편각**이라 하고, $\arg(z) = \theta$ 로 쓴다. 편각은 유일하게 결정되지 않으며, 2π 의 정수배 차이를 허용하기로 한다. 두 복소수 z_1 과 z_2 의 곱에 대하여 생각하자. 만일 $\arg(z_1) = \theta_1$, $\arg(z_2) = \theta_2$ 이면

$$\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$$

이 성립한다는 것은 알려진 사실이다. 그러므로 복소수 $z_1 z_2$ 는 복소수 평면에서 z_1 이 표시하는 점에서 원점까지의 거리를 $|z_2|$ 배로 확장(또는 축소)시키고 각도 θ_2 만큼 반시계방향으로 회전시킨 점을 표시한다.

예제 2. $|2i| = 2$ 이고 $\arg(2i) = \frac{\pi}{2}$ 이다. 따라서 복소수 z 가 주어졌을 때, z 가 표시하는 점을 반시계방향으로 $\frac{\pi}{2}$ 회전시키고 그 크기를 두 배로 하면 $2iz$ 가 표시하는 점을 얻는다. 그리고 이것을 실축 방향으로 +3만큼 평행이동하면 복소수 $2iz + 3$ 이 표시하는 점이 된다. 그러므로 복소수 z 가 예제 1의 방정식 $|z - i| = 1$ 을 만족할 때, $w = 2iz + 3$ 이 나타내는 점들은 중심의 좌표가 1이고 반지름이 2인 원에 있다.

예제 3. 복소수 평면에서 좌표 i 인 점과 좌표 $1 + i$ 인 점을 연결하는 선분을 L 이라 하자. 즉, $L = \{x + i : 0 \leq x \leq 1\}$ 이다. 복소수 z 가 선분 L 위를 움직일 때, $w = \frac{1}{z}$ 로 표현되는 복소수 w 의 자취를 알아보자. 먼저 선분의 끝점들을 생각한다.

$z = i$ 에 대응하는 점은 $\frac{1}{i} = -i$ 이고 $z = 1 + i$ 에 대응되는 점은 $\frac{1}{1+i} = \frac{1}{2} - \frac{i}{2}$ 이다.

그런데 L 은 제1사분면에 있고 $w = \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$ 이므로, w 는 제4사분면에 있다. 따라서

w 의 자취는 좌표가 $-i$ 인 점에서 좌표가 $\frac{1}{2} - \frac{i}{2}$ 인 점을 연결하는 제4사분면의 곡선이다. 실제로

$$w = \frac{1}{z} = \frac{1}{x + i} = \frac{x}{x^2 + 1} - \frac{i}{x^2 + 1}$$

이므로 $u = \operatorname{Re}(w)$, $v = \operatorname{Im}(w)$ 라고 놓으면, $u^2 + \left(v + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$ 임을 알 수 있다. 그

러므로 구하는 자취는 중심의 좌표가 $-\frac{i}{2}$ 이고 반지름이 $\frac{1}{2}$ 인 원의 일부, 정확히 말하면 오른쪽 아래에 있는 4분원이다.

[문제 2-1] (10 점) 중심의 좌표가 $3+i$ 이고 반지름 2인 원 위에서 움직이는 점의 좌표를 z 라 할 때, 복소수 $z + \bar{z}$ 가 표시하는 도형은 무엇인지 밝혀라.

[문제 2-2] (10 점) 부등식 $\frac{1}{2} \leq \operatorname{Im}\left(\frac{1}{z}\right) \leq 1$ 이 나타내는 영역을 복소수 평면에 표시하라.

[문제 2-3] (10 점) 복소수 평면에서 중심의 좌표가 1이고 반지름이 1인 원을 R 이라 하자. 원 R 상의 점들의 좌표를 z 라 할 때, 복소수 $w = (1+i)z + i$ 가 표시하는 점들은 복소수 평면에서 어떤 도형을 표시하는지 밝혀라.

[문제 2-4] (10 점) 복소수 $\alpha (\neq 0)$ 와 β 는 주어졌다. 복소수 평면에 있는 임의의 다각형을 T 라 하자. T 위의 점들의 좌표를 z 라 할 때, 복소수 $\alpha z + \beta$ 가 표시하는 도형은 T 와 닮은꼴임을 보여라.

[문제 2-5] (10 점) 좌표가 $1+i$, $-1+i$, $-1-i$, $1-i$ 인 점들을 꼭짓점으로 하는 정사각형 위의 점들의 복소수 좌표를 z 라 할 때, 복소수 $w = \frac{1}{z}$ 이 나타내는 도형은 무엇인지 밝혀라.

2013학년도 아주대학교 수시2차 논술 예시답안

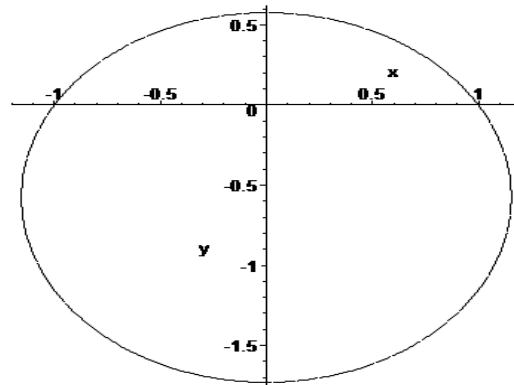
[문제 1-1] $\theta\phi$ -좌표가 (θ, ϕ) 인 점 P 의 xy -좌표를 (x, y) 라 하자.

그러면, $\tan \theta = \frac{y}{1+x}$ 이고 $\tan \phi = \frac{y}{1-x}$ 이다. 따라서 $\lambda = \frac{1+x}{y}$ 이고, $\mu = \frac{1-x}{y}$ 이다.

[문제 1-2] 방정식 $\theta + \phi = \frac{\pi}{3}$ 의 양변에 \tan 를 취하면

$$\begin{aligned}
 \sqrt{3} &= \tan\left(\frac{\pi}{3}\right) = \tan(\theta + \phi) = \frac{\tan \theta + \tan \phi}{1 - \tan \theta \tan \phi} \\
 &= \frac{\frac{y}{1+x} + \frac{y}{1-x}}{1 - \frac{y}{1+x} \frac{y}{1-x}} = \frac{2y}{1 - x^2 - y^2}
 \end{aligned}$$

이다. 이것을 다시 정리하면, $x^2 + \left(y + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{4}{3}$ 이다. 따라서 주어진 방정식의 그래프는 중심이 $\left(0, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ 이고, 반지름이 $\frac{2}{\sqrt{3}}$ 인 원이다.



[문제 1-3] 점 P 의 xy -좌표를 (x_1, y_1) 이라 하면,

$$2 = \frac{1+x_1}{y_1}, \quad 1 = \frac{1-x_1}{y_1}$$

이고, 이것을 풀면 $(x_1, y_1) = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ 이다. 같은 식으로 점 Q 의 xy -좌표를 (x_2, y_2) 라 하면,

$$3 = \frac{1+x_2}{y_2}, \quad -1 = \frac{1-x_2}{y_2}$$

이고, 이것을 풀면 $(x_2, y_2) = (2, 1)$ 이다. 따라서

$$PQ = \sqrt{\left(\frac{1}{3} - 2\right)^2 + \left(\frac{2}{3} - 1\right)^2} = \frac{\sqrt{26}}{3}$$

[문제 1-4] 주어진 직선의 xy -좌표에 의한 방정식은

(1) $y = 2x + 1$

이다. 그런데,

$$\lambda = \frac{1+x}{y}, \quad \mu = \frac{1-x}{y}$$

이므로 이것을 x, y 에 대해 풀면

$$x = \frac{\lambda - \mu}{\lambda + \mu}, \quad y = \frac{2}{\lambda + \mu}$$

이다. 이것을 식 (1)에 대입하여 정리하면,

$$\frac{2}{\lambda + \mu} = \frac{2(\lambda - \mu)}{\lambda + \mu} + 1$$

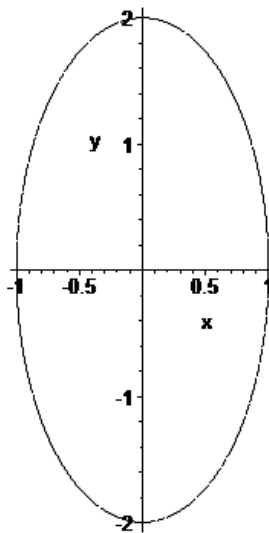
$$2 = 2\lambda - 2\mu + \lambda + \mu$$

$$3\lambda - \mu = 2$$

이므로 구하는 방정식은 $3\lambda - \mu - 2 = 0$ 이다.

[문제 1-5] $\lambda = \frac{1+x}{y}$ 와 $\mu = \frac{1-x}{y}$ 를 주어진 방정식 $\lambda\mu = \frac{1}{4}$ 에 대입하면 $\frac{1-x^2}{y^2} = \frac{1}{4}$ 이고,

이것을 정리하면 $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ 이다. 따라서 주어진 방정식의 그래프는 타원이다.



[문제 2-1] (10 점) 중심의 좌표가 $3+i$ 이고 반지름 2인 원 위에서 움직이는 점의 좌표를 z 라 할 때, 복소수 $z + \bar{z}$ 가 표시하는 도형은 무엇인지 밝혀라.

해답. $z = x + yi$ 라 하자. 그러면 $1 \leq x \leq 5$ 이다. $z + \bar{z} = 2x$ 이므로 구하는 도형은 실축에서 좌표가 각각 2와 10인 점을 연결하는 선분이다.

[문제 2-2] (10 점) 부등식 $\frac{1}{2} \leq \operatorname{Im}\left(\frac{1}{z}\right) \leq 1$ 이 나타내는 영역을 복소수 평면에 표시하라.

해답. $\frac{1}{z} = \frac{x-yi}{x^2+y^2}$ 이므로 오른쪽 부등식은 $\frac{-y}{x^2+y^2} \leq 1$ 과 같다. 그런데 이것을 변형하면

$$x^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 \geq \frac{1}{4}$$

이 된다. 왼쪽의 부등식도 유사하게 다루면,

$$x^2 + (y+1)^2 \leq 1$$

을 얻는다. 따라서 구하는 영역은 중심의 좌표가 $-\frac{1}{2}i$ 이고 반지름이 $\frac{1}{2}$ 인 원의 바깥이며 중심의 좌표가 $-i$ 이고 반지름이 1인 원의 안쪽이다. 단, 경계인 두 원을 포함한다.

[문제 2-3] (10 점) 복소수 평면에서 중심의 좌표가 1이고 반지름이 1인 원을 R 이라 하자. 원 R 상의 점들의 좌표를 z 라 할 때, 복소수 $w = (1+i)z + i$ 가 표시하는 점들은 복소수 평면에서 어떤 도형을 표시하는지 밝혀라.

해답. 원 R 의 방정식은 $|z-1| = 1$ 이다. $z = \frac{w-i}{1+i}$ 을 대입하면 다음을 얻는다.

$$|w-1-2i| = \sqrt{2}$$

구하는 도형은 중심이 $1+2i$ 이고 반지름은 $\sqrt{2}$ 인 원이다.

[문제 2-4] (10 점) 복소수 $\alpha (\neq 0)$ 와 β 는 주어졌다. 복소수 평면에 있는 임의의 다각형을 T 라 하자. T 위의 점들의 좌표를 z 라 할 때, 복소수 $\alpha z + \beta$ 가 표시하는 도형은 T 와 닮은꼴임을 보여라.

해답. 다각형 T 의 한 변을 ℓ 이라 하자. ℓ 을 연장한 직선이 원점을 지나지 않는 경우만 생각해도 충분하다. ℓ 의 점들의 좌표를 z 라 할 때, $|\alpha|z$ 가 표시하는 도형은 ℓ 과 평행하고 길이가 $|\alpha|$ 배인 평행한 선분이다. T 의 모든 변에 대하여 똑같은 논의를 적용할 수 있으므로 T 의 점들의 좌표를 z 라 할 때, $|\alpha|z$ 가 표시하는 도형 T' 은 T 와 닮은꼴이다. $\alpha z + \beta$ 가 표시하는 도형은 T' 을 회전시키고 평행 이동시킨 것이므로 여전히 닮은꼴이다.

[문제 2-5] (10 점) 좌표가 $1+i$, $-1+i$, $-1-i$, $1-i$ 인 점들을 꼭짓점으로 하는 정사각형 위의 점들의 복소수 좌표를 z 라 할 때, 복소수 $w = \frac{1}{z}$ 이 나타내는 도형은 무엇인지 밝혀라.

해답. 주어진 네 점은 각각 $\frac{1-i}{2}$, $\frac{-1-i}{2}$, $\frac{-1+i}{2}$, $\frac{1+i}{2}$ 로 보내진다. 제시문의 예제 3과 같은 방법을 적용하면, 좌표 $-1+i$ 인 점과 좌표 $1+i$ 인 점을 연결하는 변의 자취는 좌표가 각각 $\frac{-1-i}{2}$ 와 $\frac{1-i}{2}$ 인 두 점을 지름의 양끝으로 하는 아래쪽 반원이다. 정사각형의 다른 변들에 대하여 같은 방법을 적용하면 구하는 자취는 4개의 반원이 이루는 도형임을 알 수 있다.